UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES

CÁLCULO DIFERENCIAL
Material Complementario Nº 1
2021-1

Profesores: **Fabiola Jabo Bereche** rosa.jabo.b@uni.edu.pe

CAPÍTULO 1: FUNCIONES
Horas de teoría: 8

I. Definición de Función. Dominio y rango. Gráficas.

1.- Determine cuáles de las siguientes relaciones son funciones. Para aquellas que son funciones determine su dominio. Esboce la gráfica de la s 4 relaciones.

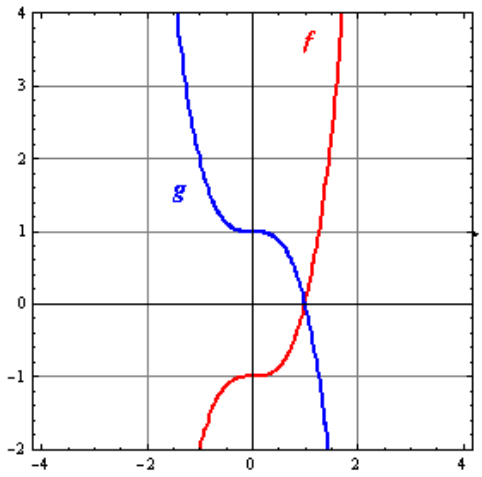
a) $R=\{(x,y)\in R^2 / y=x^2\}$

b) $R=\{(x,y)\in R^2 / x=\sqrt{y}\}$

c) $R=\{(x,y)\in R^2 / x^2+4y^2=16\}$

d) $R=\{(x,y)\in R^2 / y=-\sqrt{9-x^2}\}$

2.- Se dan a continuación las gráficas de f y g



a) ¿Cuáles son los ceros de f y g ?
b) ¿Para qué valor de x se tiene $f(x)=g(x)$?
c) Estime la solución de la ecuación $f(x)= -2$
d) Determine aproximadamente el dominio e imagen de f y g.

3.- Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones.

a) $g(x)=-2x^2+7x+12$

b) $h(x)=|5-x^2|$

c) $F(x)=\sqrt{x^2-16}$

d) $G(x)=-\sqrt{6-2x}$

e) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{2x-6}, & x\neq 3\\ 4, & x=3\end{cases}$

g) $F(x)=\begin{cases}|x|-7, & x<0\\ \dfrac{2-x}{x+1}, & x\geq 0\end{cases}$

f) $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}+5, & |x|\leq 1\\ |-x+3|, & x>5\end{cases}$

h) $H(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\leq -2\\ 8-x, & -2<x<4\\ 3, & x\geq 5\end{cases}$

i) $f(x)=x^3+x^2-x$

II. Gráficas por traslación vertical y horizontal. Gráficas por dilatación y por contracción.

4.- Graficar las funciones del ejercicio 3, utilizando traslaciones horizontales o verticales donde sea posible.

5.- Utilizando las transformaciones adecuadas, grafique las siguientes funciones:

a) $f(x)=-\frac{1}{3}Cos(-x+\frac{\pi}{3})$

b) $h(x)=0{,}5Sen(x+\frac{\pi}{6})$

c) $g(x)=4\left(\frac{x}{2}+5\right)^3-6$

d) $f(x)=Sen(-2x)$

III. Función par, impar, creciente y decreciente.

6.- Grafique las siguientes funciones, diga si ellas podrían ser pares o impares. Compruebe su afirmación de manera analítica. Diga también en que intervalos ellas son crecientes o decrecientes.

a) $g(x)=x^2-5x+4$

b) $g(x)=|x-8|+7$

c) $f(x)=-x^3+2x^2-x$

d) $h(x)=|x^2-4|+3$

7.- Extender las funciones dadas, graficando y dando la regla de correspondencia de la nueva función que coincida con f en su dominio, de modo tal que la nueva función sea i) par ii) impar.

a) $f(x)=x^2+2x,\ 0<x\leq 2$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1, & 0<x\leq 1\\ 0, & 1\leq x<2\end{cases}$

8.- Demuestre que la función $f(x)=3-2\sqrt{\frac{x}{2}-1}$ es decreciente en todo su dominio.

IV. Álgebra de funciones.

9.- En cada uno de los casos, determine el dominio de f y g. Defina las funciones f+g, f-g, f.g, f/g, g/f si es que existen, determinando sus respectivos dominios.

a) $f(x)=\sqrt{-x-3},\ g(x)=x^2+1$

b) $f(x)=\left|-x+12\right|,\ g(x)=\sqrt{2x+1}$

c) $f(x)=-x^2,\ x\geq 0;\quad g(x)=-x^2+1, x\leq 0$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+5}{2}, & x\geq 1\\ |x|, & |x|<1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2-9, & x\geq 2\\ \sqrt{2-x}, & x<-2\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}, & x>0\\ \dfrac{2x+1}{x-1}, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}6+x, & x\geq 1\\ \sqrt{1-x^2}, & 0<x<1\end{cases}$

f) $f(x)=4x-4,\ x\leq 3;\quad g(x)=2x+2, x\geq -3$

10.- Demostrar que el producto de dos funciones pares o de dos funciones impares es par, mientras que el producto de una función par por otra impar es una función impar.

V. Composición de funciones

11.- Defina las siguientes funciones compuestas, $f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f, g\circ g$. Determine el dominio en cada caso.

a) $f(x)=x+1,\quad g(x)=-x+6$

b) $f(x)=\dfrac{2}{x-3},\quad g(x)=\sqrt{2+x}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{6+x-x^2}{x}}$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & x>1\\ x+1, & x<0\end{cases}$

d) $f(x)=Sen\,x,\quad g(x)=1-\sqrt{x}$

Haga lo mismo con las funciones dadas en el ejercicio 9.

12.- Suponga que g es una función impar y considere que existe la composición $h=f\circ g$ ¿Será h siempre una función impar? ¿Qué sucede si g es par?

13.- Analice si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si f y g son dos funciones decrecientes, entonces $f\circ g$ es creciente". Justifique su respuesta.

VI. Funciones inyectivas y biyectivas.

14.- Determinar gráfica y analíticamente, si las siguientes funciones son inyectivas.

a) $f(x) = 5x - 14$

b) $f(x) = 67$

c) $g(x) = -x^3 - 6$

d) $h(x) = Sen\,(x - \pi)$

e) $h(x) = 1 - tg\ x$

f) $g(x) = |x|, \quad x \geq 0$

g) $h(x) = |x^2 + 7|$

h) $f(x) = Sen\ x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

i) $g(x) = \sqrt{x^2 + 8}$

j) $F(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & |x| \leq 1 \\ \dfrac{3}{|x|}, & |x| > 1 \end{cases}$

15.- Si asumimos que en el ejercicio anterior las funciones tienen como conjunto de llegada a los números reales, determine cuáles de ellas son suryectivas.

16.- Considerando la condición dada en el ejercicio 15, determine cuáles de las funciones dadas en el ejercicio 14, son biyectivas.

VII. Función inversa. Inversas de las funciones trigonométricas

17.-Determine si las siguientes funciones tienen inversa, en caso de tenerla, dar la regla de correspondencia y el respectivo dominio. Graficar la función y su inversa en un mismo plano coordenado.

a) $f(x) = -x^3 + x$

b) $g(x) = \sqrt{2x - 3}$

c) $h(x) = (1 - x)^3$

d) $f(x) = |x| + 5$

e) $f(x) = |x + 2|, \quad x \leq -3$

f) $h(x) = (4 + x)^2, x \geq -6$

g) $F(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad si\ |x - 1| \leq 2$

h) $G(x) = Sen\ x, \quad 0 \leq x \leq \pi / 2$

18.- Determine el subconjunto más grande posible del dominio dado de f para que pueda tener inversa, determine la función inversa de f en el dominio restringido y esboce las gráficas de la nueva f y f^{-1} en un mismo plano coordenado.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4, \quad x > 1$

b) $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2 - 3, & x < 2 \\ -2x + 5, & x \geq 2 \end{cases}$

19.- Determine el dominio de la función $f(x) = arcsen(\sqrt{9 - x^2})$

20.- Determine la inversa de la función

$$f(x) = \frac{4}{\pi} arc\cos(x - 1), \quad 0 \leq x < 2;$$

Y grafíquela, si es que existe.

21.- Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2+2, & x\le -1\\ arctg(x+1), & x>-1\end{cases}$$

a) Muestre gráficamente que f es inyectiva.

b) Halle la regla de correspondencia de la inversa de f, indicando su dominio.

c) Grafique en un mismo sistema de coordenadas f y su inversa.

VIII. Funciones exponencial y logaritmo.

22.- Esboce la gráfica de las siguientes funciones, determinando en cada caso su dominio y rango.

a) $f(x)=-\ln(4-x)$

b) $g(x)=1-2\ln|-x|$

c) $h(x)=\ln(x^4)$

d) $F(x)=-5^x$

e) $G(x)=-5^{-x}$

f) $H(x)=e^{x^2}$

g) $h(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}, & x<-3\\ 2Sen\,x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \log_3(x)+2, & x>3\end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2), & -e^3\le x\le 1,\ x\neq 0\\ 2\ln x, & 1<x<e^3\end{cases}$

23.- ¿Es lícito afirmar que $\ln(x^4)=4\ln(x)$?

24.- En cada uno de los casos, determine el dominio de f y g. Defina las funciones f+g, f-g, f.g, f/g, g/f, $f\circ g, g\circ f$ si es que existen, determinando sus respectivos dominios.

a) $f(x)=\sqrt{e^x+3},\ g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

b) $f(x)=\ln(x+3),\ g(x)=e^{1/x}$

c) $f(x)=-e^{x-4}, x\ge 0\quad g(x)=x^2+3, x\le 0$

25.- Para cada una de las funciones que se dan a continuación

a) $f(x)=e^{-x}+1,\quad 0<x<3$

b) $f(x)=\begin{cases}e^x-2, & x\ge \ln 4\\ x^2-x, & 0<x\le 1\end{cases}$

desarrolle lo que se le indica a continuación:

i) Grafique f

ii) Extienda gráficamente f a una función g, tal que g sea impar.

iii) Determine la regla de correspondencia de g.

iv) Compruebe analíticamente que g es impar.

26.- Determine gráfica y analíticamente, si las siguientes funciones son inyectivas.

a) $g(x)=\ln(-x+3)$ b) $g(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\le 0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \end{cases}$ c) $G(x)=2^x-4$

27.- Considere la función:

$$h(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x<-3 \\ 2Sen\,x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \log_3(x)+2, & x>3 \end{cases}$$

Diga dónde la función es inyectiva. Halle la regla de correspondencia de la función inversa y grafíquela.

28.- Determine en que intervalo del dominio dado de f , ésta posee inversa, determine la función inversa de f y esboce las gráficas de f y f^{-1} en un mismo plano coordenado.

a) $f(x)=\begin{cases} \log_2(x+2), & 2\le x\le 6 \\ -2x+5, & -2\le x<2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \ln(x^2), & -e^3\le x\le -1 \\ 2\ln x, & 1<x<e^3 \end{cases}$

29.- Halle la regla de correspondencia de la función inversa de $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

30.- Sea $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$. Demostrar que $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

31.- Determine el dominio de la función g. ¿Es g una función par?

$$g(x)=\sqrt{\frac{(x-2)^{100}(3-x)^{33}(x-5)^{33}}{x^2-1}}+\log(4-x^2)$$

IX. Función Mayor Entero y Signo.

32.- Determine el dominio y regla de correspondencia de $f\circ g$, si es que existe:

$$f(x)=Sgn\,(x^2-9), x>0,\ \ g(x)=\left[\left|\frac{1}{x-6}\right|\right]$$

33.- Discutir y graficar la región dada por la siguiente relación:

$$[\![x]\!]+[\![y]\!]-x-y\le 1$$

34.- Halle el dominio y un bosquejo de la siguiente función:

$$F(x)=\frac{\sqrt{1-[\![x-1]\!]}}{|x|-[\![x]\!]}+\sqrt{\frac{[\![x]\!]}{|x|-\mathrm{Sgn}(x^3-x)}}$$

35.- Determine el dominio de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x+|x|}{|x|-[\![x]\!]}$$

X. Funciones Hiperbólicas.

36.- Determine cuáles de las 6 funciones hiperbólicas son pares o impares.

37.- Demuestre las siguientes identidades hiperbólicas:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

c) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

38.- Haga un esbozo de la gráfica de las funciones hiperbólicas.

39.- Investigue: ¿A qué cree usted que le deben el nombre las funciones hiperbólicas? ¿Quién se ocupó de su estudio?

XI. Aplicaciones.

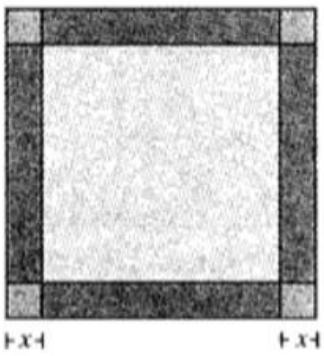
40.- Una empresa, dedicada al servicio de transporte de encomiendas, usa el siguiente criterio para fijar los pagos que sus clientes deben realizar por sus envíos a una ciudad del interior del país en particular: Por un paquete de hasta 3 kilos se debe pagar 20 soles, y 8 soles por cada kilogramo o fracción adicional.

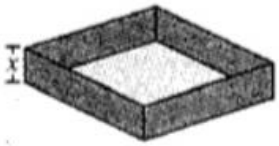
Con la información brindada:

a) Modele (en términos de la función máximo entero) el pago que un cliente realiza por el envío de un paquete de x kilogramos. Argumente todo su procedimiento.

b) Grafique la función definida en el ítem (a).

41.- Se va a construir una caja abierta (sin tapa) de volumen máximo con una pieza cuadrada de material de 30 centímetros de lado, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados hacia arriba, tal como se muestra en la figura.





a) Exprese el volumen V de la caja en función de la variable x, ¿cuál es el dominio de la función?

b) Haga un esbozo de la gráfica de la función $V(x)$.

c) Indique para qué valor entero de x, el volumen de la caja sería máximo.

42.- El costo, en dólares, de quitar $p\%$ de la suciedad de un lago está dado por:

$$y = C(p) = \frac{1\,000p}{105 - p}$$

a) Halle el dominio de la función de costo. ¿La función $C(p)$ es continua en todo su dominio?

b) Determine si la función $C(p)$ posee inversa. En caso de ser invertible, dé la regla de correspondencia de $C^{-1}(y)$.

43.- Para bienes como los autos, los electrodomésticos y los muebles, su valor se **deprecia,** o decae, cada año. Si el valor del bien decae cada año en una cantidad fija, dada por un porcentaje del valor original del mismo, se dice que la depreciación es "**lineal**". En base a esta información, responda lo siguiente:

a) Suponiendo que el valor inicial de un auto es 20 000 euros y este se deprecia en un 10% de su valor inicial cada año. Encuentre una fórmula y su respectivo dominio para describir su valor, $P(t)$, pasados t años.
b) Si una lavadora de 500 euros se deprecia linealmente en 10 años, encuentre una fórmula y su respectivo domino para describir su valor, $W(t)$, pasados t años.